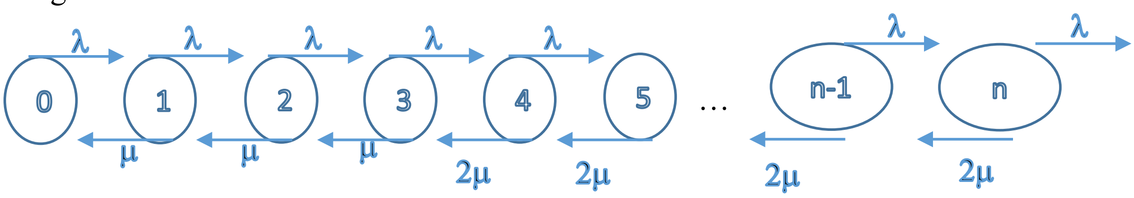
1. Considerar un sistema M/M/1 con la particularidad de que se añade un servidor (igual que el que ya estaba) cuando la longitud de la cola excede de 2 clientes. Suponer que la tasa de llegadas de clientes es λ clientes por hora y la tasa de servicio μ clientes por hora.
    a. Modelar el sistema, calcular la distribución de probabilidad estacionaria y el número medio de clientes en el sistema.
    b. Suponer que cada hora que pasa un cliente en el sistema cuesta 20 euros y el coste por hora del servidor adicional es de 50 euros. Si consideramos que $\lambda = 7$ clientes por hora y $\mu = 8$ clientes por hora, ¿cuál es la ganancia media por hora por usar este sistema en lugar del M/M/1?

Solución.

a. Diagrama de transición del sistema:



Ecuaciones de equilibrio:

$$
\begin{array}{lll}
\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 & \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 & \pi_1 = (\lambda/\mu)\pi_0 \\
(\lambda+\mu)\pi_1 = \lambda\pi_0+\mu\pi_2 & \lambda\pi_1 = \mu\pi_2 & \pi_2 = (\lambda/\mu)^2\pi_0 \\
(\lambda+\mu)\pi_2 = \lambda\pi_1+\mu\pi_3 & \lambda\pi_2 = \mu\pi_3 & \pi_3 = (\lambda/\mu)^3\pi_0 \\
(\lambda+\mu)\pi_3 = \lambda\pi_2+2\mu\pi_4 & \lambda\pi_3 = 2\mu\pi_4 & \pi_4 = (\lambda/\mu)^4\pi_0/2 \\
(\lambda+2\mu)\pi_4 = \lambda\pi_3+2\mu\pi_5 & \lambda\pi_4 = 2\mu\pi_5 & \pi_5 = (\lambda/\mu)^5\pi_0/2^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(\lambda+2\mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1}+2\mu\pi_{n+1} & \lambda\pi_{n-1} = 2\mu\pi_n & \pi_n = (\lambda/\mu)^n\pi_0/2^{n-3} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\sum\pi_n=1 & \sum\pi_n=1 & \sum\pi_n=1
\end{array}
$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{2^{n-3}}} = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n} = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}}.$$

$$\pi_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0, si\ n = 0,1,2,3 \\ 8\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n \pi_0, si\ n = 3,4,5,\ldots \end{cases}$$

El número medio de clientes en el sistema es:

$$
\begin{aligned}
L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\
&+ 8\sum_{n=3}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n \pi_0 \\
&= \left[\frac{\lambda}{\mu} + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 8\left(\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n - \sum_{n=0}^{2} n\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^n\right)\right]\pi_0 \\
&= \left[\frac{\lambda}{\mu} + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 8\left(\frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2} - \frac{\lambda}{2\mu} - 2\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2\right)\right]\pi_0 \\
&= \left[\frac{\lambda}{\mu} + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{\frac{4\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2} - \frac{4\lambda}{\mu} - 4\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]\pi_0 \\
&= \left[\frac{\frac{4\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2} - \frac{3\lambda}{\mu} - 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]\pi_0
\end{aligned}
$$

b. Si consideramos que $\lambda = 7$ clientes por hora y $\mu = 8$ clientes por hora entonces $\pi_0 = \frac{1}{1+\frac{7}{8}+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^3\frac{1}{1-\frac{7}{16}}} = 0.26$. Por lo tanto, $L = \left[\frac{\frac{28}{8}}{\left(1-\frac{7}{16}\right)^2} - \frac{21}{8} - 2\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]0.26 = 1.8.$ El coste de este sistema es $20L + 50 = 86$ euros por hora. Sin embargo, el coste medio por hora del sistema M/M/1 es $20\frac{7}{8-7} = 140$. Por lo tanto, la ganancia media por hora por usar este sistema en lugar del M/M/1 es 140 – 86 = 54 euros por hora.

2. Llegan trabajos al servidor A según un proceso de Poisson con tasa 10 trabajos por minuto. El servidor los procesa correctamente en un tiempo exponencial de media 6 segundos. Sin embargo, cuando hay 3 trabajos esperando a procesarse en el servidor A los trabajos que lleguen al servidor A son desviados al servidor B donde pueden esperar todos los trabajos que se quieran. El servidor B tarda un tiempo exponencial de tasa μ_B trabajos por minuto. El porcentaje de trabajos procesados correctamente en el servidor B es del 90%. Los que no son procesados correctamente pasan al servidor C. El tiempo que tarda en procesar un trabajo el servidor C se distribuye exponencialmente de media 20 segundos. El 80% de los trabajos del servidor C son procesados correctamente y los que no son procesados correctamente se vuelven a enviar al servidor B.
    a. El servidor A, ¿qué tipo de modelo de cola es?
    b. ¿Cuánto debe valer como mínimo la tasa de servicio del servidor B (μ_B) para que el sistema sea estable?
    c. ¿Cuál es el tiempo medio que pasa un trabajo en el sistema si es procesado por el servidor A?
    d. ¿Cuál es el tiempo medio que pasa un trabajo en sistema si no es procesado por el servidor A (suponer que el sistema es estable)?

e. ¿Cómo se distribuye los trabajos procesados correctamente por el servidor B? ¿Cómo se distribuye los trabajos correctamente procesados por el servidor C?

Solución.

a. El servidor A es un modelo M/M/1/4 con tasa de llegadas $\lambda_A = 10$ trabajos por minuto y de servicio $\mu_A = 10$ trabajos por minuto.
b. El servidor B se comporta como un M/M/1 con tasa de llegadas $\Lambda_B = 2.04$ trabajos por minuto y de servicio μ_B trabajos por minuto. Por lo tanto, la tasa de servicio del servidor B (μ_B) para que el sistema sea estable debe verificar $\mu_B > 2.04$.
c. El tiempo medio que pasa un trabajo en el sistema si es procesado por el servidor A es $W = \frac{L}{\lambda_A} = \frac{k/2}{\lambda(1-\pi_4)} = \frac{2}{10(1-1/5)}$ = ¼ minutos.
d. El tiempo medio que pasa un trabajo en sistema si no es procesado por el servidor A es W = L/ λ = L/2
con $L = L_1 + L_2 = 2.04/(\mu_B - 2.04) + 0.2/(3-0.2)$. Por lo tanto, $W = 1.02/(\mu_B - 2.04) + 0.035$ minutos.
e. Los trabajos procesados correctamente por el servidor B se distribuyen según un Proceso de Poisson de tasa 0.9 x 2.04 = 1.836 trabajos por minuto.
Los trabajos correctamente procesados por el servidor C se distribuyen según un Proceso de Poisson de tasa 0.8 x 0.2 = 0.16 trabajos por minuto.

3. Cierto puerto ubicado en el sur del país está especialmente equipado para la descarga de mineral. Una flota de N barcos está a cargo del transporte del mineral.
El puerto dispone de dos muelles destinados a descargar los barcos. El muelle 1 demora en promedio t_1 en descargar mientras que el muelle 2 tarda t_2. Algunos estudios realizados han permitido determinar que el tiempo de descarga en ambos muelles sigue una distribución exponencial.
Por otro lado, el tiempo que tarda un barco desde que sale del puerto (vacío) y regresa (cargado) es una variable aleatoria exponencial de media t_3. Cuando un barco llega al puerto entra en el muelle 1 si éste se encuentra vacío, sino entra al muelle 2.
De estar ambos muelles ocupados esperará en las cercanías hasta que alguno de los muelles se desocupe.
    a. Obtenga el diagrama de transición de la CMTC.

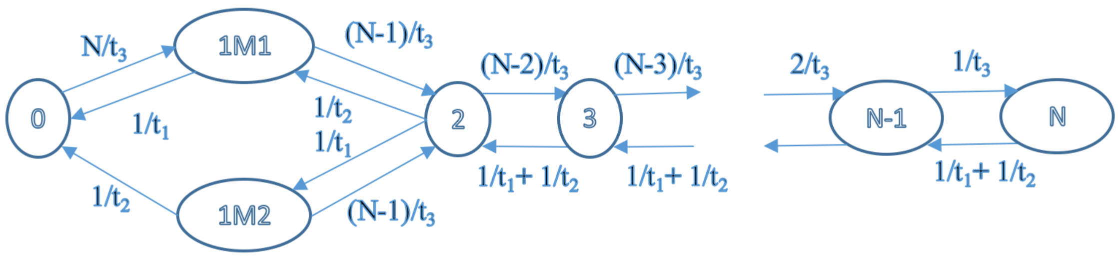
    En los siguientes apartados considerar que $t_1 = 2$ horas , $t_2 = 1$ horas , $t_3 = 12$ horas y $N = 3$ barcos.

    b. Plantear el sistema de ecuaciones de equilibrio e indique el número medio de barcos esperando en las cercanías.
    c. ¿Cuál es el tiempo medio de espera en las cercanías de los barcos?
    d. Supongamos que el puerto está vacío. ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo que tarda en llegar un barco sea mayor que 5 horas? ¿Cuál es el tiempo que tarda en llegar el quinto barco desde ese instante?

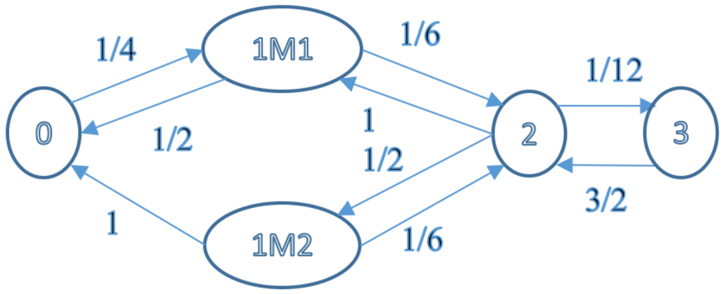
Solución.

a. Sea S={0, 1M1, 1M2, 2, 3, 4,…, N-1,N} el conjunto de estados de la CMTC, que representan el número de barcos que hay en el puerto (en los muelles y esperando en las cercanías), donde el estado 1M1 representa que hay un barco en el puerto descargando en el muelle 1 y 1M2 que hay un barco en el puerto descargando en el muelle 2.

El diagrama de transición es el siguiente:



b. El diagrama de transición queda de la siguiente forma:



y las ecuaciones de equilibrio son:

$$\pi_0/4 = \pi_{1M1}/2 + \pi_{1M2}$$
$$\pi_{1M1}\ (1/6+ ½) = \ \pi_0/4 + \pi_2$$
$$\pi_{1M2}\ (1/6+ 1) = \ \pi_2/2$$
$$\pi_2\ (½ + 1 + 1/12) = \pi_{1M1}/6 + \pi_{1M2}/6 + 3\pi_3/2$$
$$3\pi_3/2 = \pi_2/2$$
$$\pi_0 + \pi_{1M1}/+ \pi_{1M2} + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

El número medio de barcos esperando en las cercanías es π_3.

c. El tiempo medio de espera en las cercanías de los barcos se obtiene a partir de la tasa de permanencia del estado 3, siendo su inversa, por lo tanto

$$1/(1/t1 + 1/t2) = 1/(3/2) = 2/3 \text{ horas} = 40 \text{ minutos}$$

d. X= tiempo que tarda en llegar un barco es Exponencial con tasa 1/12 llegadas por hora. Por lo tanto,

$$P(X>5) = 1 - P(X\leq 5) = 1 - (1-e^{-5/12}) = e^{-5/12}$$

Y = tiempo hasta que llega el quinto barco se distribuye según una Gamma(5, 1/12). Por lo tanto,

$$E[Y] = 5/(1/12) = 60 \text{ horas.}$$